CAPITOLO 3

Sistemi discreti a più gradi di libertà

Alfonso Pagani

MUL^2 Lab – Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
Politecnico di Torino

Obiettivi del capitolo

Dal sistema a 1 g.d.l.

Estendiamo i concetti del capitolo precedente a sistemi con più coordinate dinamiche:

- frequenze naturali e modi propri;
- coordinate e sovrapposizione modale;
- troncatura della base modale.

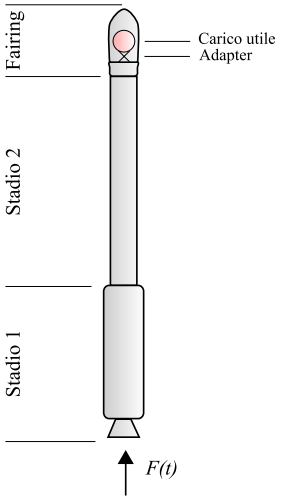
Applicazione guida

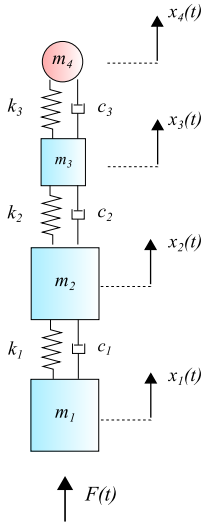
Un modello a masse concentrate del sistema lanciatore–carico utile introduce:

- carichi da lancio;
- *coupled loads analysis*;
- partecipazione modale.

Le stesse idee saranno poi estese a modelli strutturali con molti gradi di libertà.

Dal sistema a 1 g.d.l. al modello lanciatore–payload





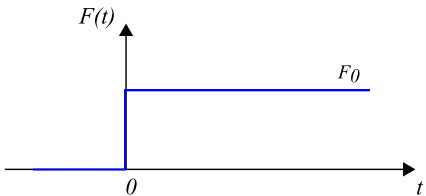
Un corpo continuo possiede idealmente infiniti gradi di libertà; un modello discreto ne conserva un numero finito, adeguato alla banda di interesse.

Modello a 4 g.d.l.

- x_1: stadio 1;
- x_2: stadio 2;
- x_3: interfaccia lanciatore–payload;
- x_4: carico utile.

Forzante di lancio semplificata

Modello lanciatore–carico utile



Nel veicolo reale, spinta e proprietà inerziali variano durante il volo.

Nel modello didattico la spinta viene idealizzata come un carico a gradino:

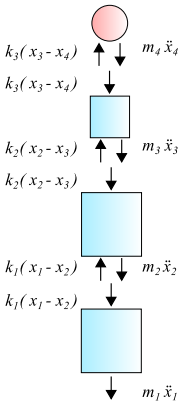
$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ F_0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Obiettivo

Studiare la risposta dinamica e i carichi trasmessi al payload con un modello semplice ma accoppiato.

Sistema libero e forma matriciale

Per calcolare i modi propri consideriamo il sistema **libero e non smorzato**.



Equazione del moto libero

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$$

- $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{K}$ descrivono inerzia e rigidezza;
- i termini fuori diagonale di $\boldsymbol{K}$ accoppiano i gradi di libertà;
- le forze elastiche dipendono dagli spostamenti relativi tra masse adiacenti.

Ricerca dei modi propri

Analisi modale

Si cercano soluzioni armoniche della forma

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}\, e^{\mathrm{i}\omega t}$$

Sostituendo nell'equazione del moto:

$$\left(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}\right) \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{0}$$

Ponendo $\lambda = \omega^2$ si ottiene il problema generalizzato agli autovalori

Problema modale

$$\boxed{\left(\boldsymbol{K} - \lambda \boldsymbol{M}\right) \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{0}}$$

Per una soluzione non banale:

$$\boxed{\det\left(\boldsymbol{K} - \lambda \boldsymbol{M}\right) = 0}$$

Frequenze naturali e forme modali

Per ciascun autovalore λ_i:

$$\boxed{\omega_{n_i} = \sqrt{\lambda_i}} \qquad \boxed{f_{n_i} = \frac{\omega_{n_i}}{2\pi}}$$

Il corrispondente autovettore $\boldsymbol{\phi}_i$ determina la forma del modo:

$$(\boldsymbol{K} - \lambda_i \boldsymbol{M})\, \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0}$$

Autovalori e autovettori

Ogni autovalore individua una frequenza naturale; il relativo autovettore descrive i rapporti tra gli spostamenti dei gradi di libertà nel modo proprio.

Proprietà del problema modale

Analisi modale

Proprietà dei modi

- Per $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{K}$ simmetriche, modi distinti sono ortogonali:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_j = 0, \qquad \boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}_j = 0,$$

$$i \neq j.$$

- Gli autovettori sono definiti a meno di un fattore moltiplicativo: occorre quindi scegliere una normalizzazione.

Matrici $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{K}$

- $\boldsymbol{M}$ è definita positiva e invertibile; nel modello a masse concentrate è diagonale (*lumped*).
- Nei modelli a massa distribuita $\boldsymbol{M}$ è in genere popolata (*consistent*) e la sua gestione è più onerosa.
- $\boldsymbol{K}$ può essere singolare: il suo rango è pari al numero di g.d.l. meno il numero di moti rigidi.

Un **moto rigido** non modifica le distanze relative tra i punti del sistema.

Conseguenza fisica

Non vi è deformazione degli elementi elastici e quindi non viene immagazzinata energia potenziale elastica.

Conseguenza modale

$$\boxed{\lambda = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_n = 0}$$

Nel modello lanciatore–payload il primo modo rappresenta la traslazione comune delle quattro masse.

Esempio numerico: modello e frequenze naturali

Parametri

$$m_1 = 445 \text{ ton}, \quad m_2 = 116 \text{ ton},$$
$$m_3 = 2 \text{ ton}, \quad m_4 = 15 \text{ ton},$$
$$k_1 = k_2 = 5 \times 10^8 \text{ N/m},$$
$$k_3 = 1 \times 10^8 \text{ N/m}.$$

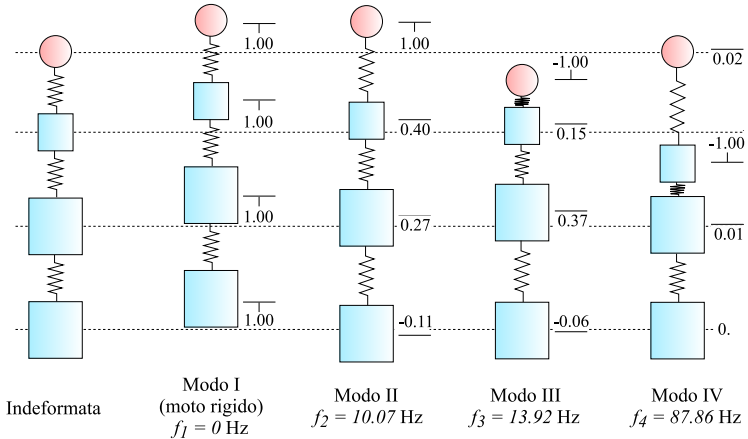
Frequenze naturali

$$f_1 = 0 \text{ Hz}, \qquad f_2 = 10.07 \text{ Hz},$$
$$f_3 = 13.92 \text{ Hz}, \quad f_4 = 87.86 \text{ Hz}.$$

f_1 corrisponde al moto rigido; gli altri tre modi sono elastici.

Forme modali

Esempio numerico



Modi globali e locali

Esempio numerico

Modo 1

Traslazione rigida: tutte le masse si muovono nella stessa direzione con la stessa ampiezza.

Modi 2–3

Modi prevalentemente globali: coinvolgono significativamente più masse, incluso il payload.

Modo 4

Modo locale: la risposta è fortemente concentrata sul terzo grado di libertà.

Attenzione

La distinzione globale/locale non misura da sola l'importanza dinamica di un modo: conta anche come la forzante lo eccita e quale risposta si osserva.

Massa modale e M-normalizzazione

Per il modo i-esimo si definisce la massa modale generalizzata

$$\boxed{m_{g_i} = \boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_i}$$

La normalizzazione rispetto alla massa è

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}_i = \frac{\boldsymbol{\phi}_i}{\sqrt{\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_i}}, \qquad \boxed{\bar{\boldsymbol{\phi}}_i^T \boldsymbol{M} \bar{\boldsymbol{\phi}}_i = 1}$$

Raccogliendo i modi M-normalizzati nella matrice $\boldsymbol{\Phi}$:

Ortonormalità rispetto alla massa

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I}}$$

Diagonalizzazione modale

Modi normalizzati rispetto alla massa

Dal problema agli autovalori

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}_i = \omega_i^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_i$$

si ottiene, per modi M-normalizzati,

Proprietà della matrice modale

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I}} \qquad \boxed{\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Omega}^2}$$

con

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$

Queste proprietà permettono di disaccoppiare le equazioni del moto.

Trasformazione nelle coordinate modali

Consideriamo la risposta forzata:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{F}(t)$$

Introduciamo la trasformazione

Coordinate modali

$$\boxed{\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{q}(t)}$$

Sostituendo:

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{F}(t)$$

Nelle coordinate fisiche il sistema è accoppiato; la trasformazione modale prepara il disaccoppiamento.

Premoltiplicando per $\boldsymbol{\Phi}^T$:

$$\boldsymbol{M}_g \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}_g \boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}_g$$

con

$$\boldsymbol{M}_g = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi}, \quad \boldsymbol{K}_g = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi}, \quad \boldsymbol{F}_g = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{F}$$

Per ortogonalità, $\boldsymbol{M}_g$ e $\boldsymbol{K}_g$ sono diagonali:

Modo i-esimo

$$\boxed{m_{g_i} \ddot{q}_i + k_{g_i} q_i = F_{g_i}(t)}, \qquad F_{g_i} = \boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{F}$$

Per modi M-normalizzati:

$$\boldsymbol{M}_g = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{K}_g = \boldsymbol{\Omega}^2$$

L'equazione modale diventa

Equazioni indipendenti

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{F}_g(t)}$$

Equivalentemente, per ciascun modo:

$$\boxed{\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = F_{g_i}(t)}$$

Ogni coordinata modale evolve come un sistema indipendente a un grado di libertà.

Risposta modale e sovrapposizione

Per ogni modo elastico ($\omega_i > 0$), la risposta si calcola come per un sistema a 1 g.d.l.:

$$q_i(t) = \frac{1}{m_{g_i}\omega_i} \int_0^t F_{g_i}(\tau) \sin[\omega_i(t-\tau)]\, \mathrm{d}\tau + \frac{\dot{q}_{i0}}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + q_{i0} \cos(\omega_i t)$$

La risposta fisica si ricostruisce mediante

Sovrapposizione modale

$$\boxed{\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{q}(t) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\phi}_i q_i(t)}$$

Per un modo rigido $\omega_i = 0$ e la formula di Duhamel del modo elastico non è applicabile.
La corrispondente equazione modale diventa

Modo rigido

$$\boxed{m_{g_i}\ddot{q}_i(t) = F_{g_i}(t)}$$

La coordinata modale si ottiene integrando direttamente l'accelerazione generalizzata.

Per una base M-normalizzata completa:

$$\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{x}(0), \qquad \dot{\boldsymbol{q}}_0 = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \dot{\boldsymbol{x}}(0)$$

Carichi da lancio: soluzione nelle coordinate modali

Consideriamo la spinta costante $F(t) = F_0$, con $F_0 = 7.6$ MN, e modi M-normalizzati.

Equazioni modali

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = 9996.54, \\ \ddot{q}_2 + 4000.82\, q_2 = -4760.16, \\ \ddot{q}_3 + 7652.89\, q_3 = -2684.72, \\ \ddot{q}_4 + 3.0476 \times 10^5\, q_4 = -9.08. \end{cases}$$

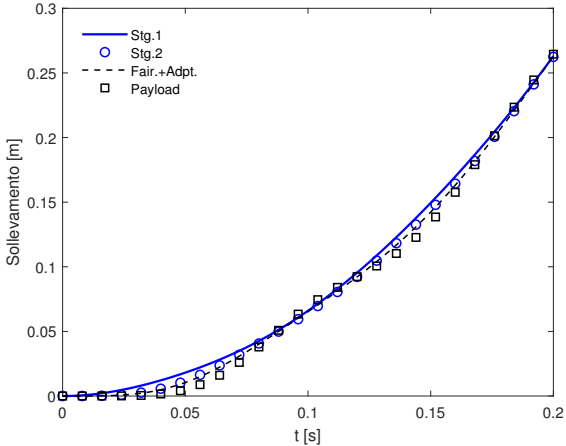
Soluzione per condizioni iniziali nulle

$$\begin{cases} q_1(t) = 4998.27\, t^2, \\ q_2(t) = -1.19\,(1 - \cos 63.25t)\,, \\ q_3(t) = -0.35\,(1 - \cos 87.48t)\,, \\ q_4(t) = -2.98 \times 10^{-5}\,(1 - \cos 552.04t)\,. \end{cases}$$

Il primo modo descrive il moto rigido; gli altri tre sono oscillatori indipendenti soggetti al gradino di spinta.

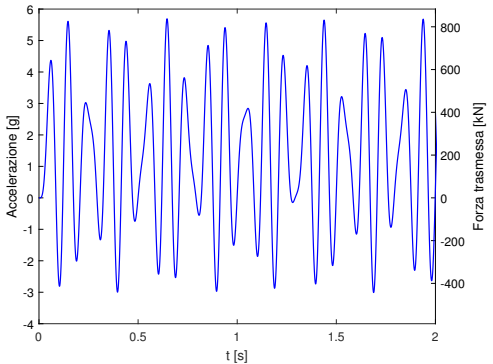
Moto del sistema lanciatore–payload

Carichi da lancio



Accelerazione e forza trasmessa al payload

Carichi da lancio



$$F_{\mathrm{tr}}(t) = k_3\big(x_3 - x_4\big) = m_4\ddot{x}_4(t)$$

I carichi sul payload dipendono dalle proprietà dinamiche dell'intero sistema accoppiato.

Analisi dei carichi accoppiata

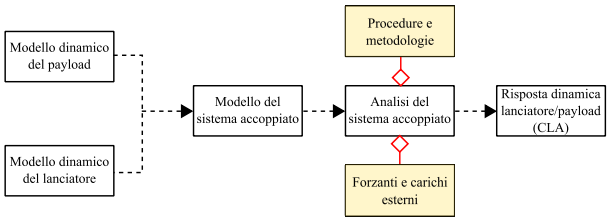
La *coupled loads analysis* (CLA) determina risposta dinamica e carichi di lancio tenendo conto dell'interazione lanciatore–payload.

Perché serve

I livelli dei manuali utente sono inviluppi generali; i carichi effettivi dipendono dalla configurazione accoppiata.

Nel progetto

Supporta verifica, dimensionamento iterativo e definizione dei livelli di prova.



Nella pratica, modelli dettagliati di lanciatore e payload vengono ridotti prima dell'accoppiamento; le tecniche di sottostrutturazione e CMS saranno trattate nel capitolo successivo.

Troncatura della base modale

Riduzione del modello dinamico

Se la risposta nella banda di interesse può essere descritta con $M < n$ modi,

Base modale troncata

$$\boxed{\boldsymbol{x}(t) \simeq \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{\phi}_i q_i(t)}, \qquad M < n.$$

Vantaggio

Nei modelli di grandi dimensioni si riduce fortemente il numero di coordinate dinamiche da trattare.

Questione fondamentale

Occorre stabilire quali modi contribuiscono realmente alla risposta nella direzione e nella banda di interesse.

I **fattori di partecipazione modale** forniscono un criterio quantitativo per selezionare la base ridotta.

Fattore di partecipazione e massa modale effettiva

Per un'eccitazione imposta alla base introduciamo il vettore $\boldsymbol{R}$, che descrive il moto rigido unitario nella direzione considerata.

$$L_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{R}$$

$$\boxed{\Gamma_i = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{R}}{\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_i}} \qquad \boxed{m_{\text{eff},i} = \frac{\left(\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{R}\right)^2}{\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_i}}$$

Una massa effettiva elevata indica che il modo viene fortemente eccitato nella direzione considerata.

Selezione della base modale

Partecipazione modale

Per una base completa:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_{\text{eff},i} = \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{R}}$$

Un criterio pratico consiste nel conservare $M < n$ modi tali che

$$\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{M} m_{\text{eff},i}}{\boldsymbol{R}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{R}}}$$

raggiunga una frazione sufficientemente elevata della massa partecipante totale.

Indicazione pratica

Il 90% viene spesso usato come criterio preliminare; il limite effettivo dipende dall'applicazione e dalla banda di frequenze.

Partecipazione nei sistemi *free–free*

Nel sistema libero, il vettore $\boldsymbol{R}$ della traslazione rigida coincide con il modo rigido. Per ortogonalità rispetto alla massa, per ogni modo elastico i:

$$\boxed{\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{R} = 0}$$

Le masse modali effettive dei modi elastici risultano quindi nulle e serve un indicatore differente. Per modi M-normalizzati si considera il contributo alla flessibilità:

$$\boldsymbol{G}_i = \frac{\boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i^T}{\omega_i^2}, \qquad \boldsymbol{G}^{\text{elas}} = \sum_{i=1}^{n_e} \boldsymbol{G}_i$$

Partecipazione relativa

$$\boxed{\eta_i^{\text{free}} = \frac{\text{tr}(\boldsymbol{G}_i)}{\text{tr}(\boldsymbol{G}^{\text{elas}})}}$$

Partecipazione dei modi elastici nell'esempio

Sistemi *free–free*

Per i tre modi elastici del modello lanciatore–payload:

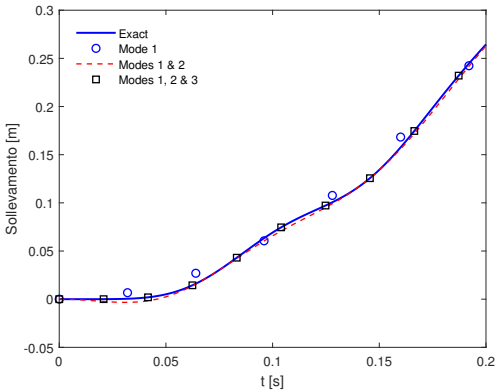
Frazioni di partecipazione

$$\eta_2^{\text{free}} = 63.24\%,$$
$$\eta_3^{\text{free}} = 27.22\%,$$
$$\eta_4^{\text{free}} = 9.54\%.$$

I modi 2 e 3 rappresentano insieme circa il 90% del contributo alla flessibilità elastica secondo questo indicatore.

Effetto della troncatura modale

Sistemi *free–free*



Per la risposta considerata, una parte limitata dei modi elastici riproduce con buona accuratezza la soluzione completa.