CAPITOLO 4

Metodi di riduzione e substructuring dinamico

Alfonso Pagani

MUL^2 Lab – Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
Politecnico di Torino

Obiettivi del capitolo

Perché ridurre il modello?

I modelli strutturali ad alta fedeltà possono contenere un numero molto elevato di gradi di libertà, con conseguenze su:

- costo computazionale;
- gestione e scambio dei modelli;
- analisi accoppiate tra sottosistemi.

Metodi introdotti

- condensazione statica di Guyan;
- MAC e COC per la correlazione modale;
- riduzione Craig–Bampton;
- *substructuring* dinamico.

Obiettivo: preservare la dinamica rilevante nella banda di interesse con un numero ridotto di coordinate.

Condensazione statica: coordinate master e slave

Partizioniamo i gradi di libertà in coordinate conservate *master*, $\boldsymbol{x}_m$, e coordinate da condensare *slave*, $\boldsymbol{x}_s$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{mm} & \boldsymbol{M}_{ms} \\ \boldsymbol{M}_{sm} & \boldsymbol{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_m \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{mm} & \boldsymbol{K}_{ms} \\ \boldsymbol{K}_{sm} & \boldsymbol{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}_m \\ \boldsymbol{x}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_m \\ \boldsymbol{F}_s \end{Bmatrix}$$

Master

Coordinate mantenute esplicitamente nel modello ridotto.

Slave

Coordinate ricostruite in funzione delle coordinate master.

Ipotesi statica e matrice di condensazione

Condensazione statica

Nella riduzione di Guyan si assume che i gradi di libertà slave seguano **quasi-staticamente** il moto dei master. Trascurando i contributi inerziali nella seconda partizione e ponendo $\boldsymbol{F}_s = \boldsymbol{0}$:

$$\boldsymbol{K}_{sm}\boldsymbol{x}_m + \boldsymbol{K}_{ss}\boldsymbol{x}_s \simeq \boldsymbol{0}.$$

Se $\boldsymbol{K}_{ss}$ è invertibile:

Relazione di condensazione

$$\boxed{\boldsymbol{x}_s = -\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{K}_{sm}\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{G}_{sm}\boldsymbol{x}_m}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{G}_{sm} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{T}_{sm}\boldsymbol{x}_m}$$

Modello dinamico ridotto

Condensazione statica

La stessa trasformazione vale per spostamenti, velocità e accelerazioni. Le matrici ridotte si ottengono per proiezione:

Massa ridotta

$$\overline{\boldsymbol{M}}_{mm} = \boldsymbol{T}_{sm}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{T}_{sm}$$

Rigidezza ridotta

$$\overline{\boldsymbol{K}}_{mm} = \boldsymbol{T}_{sm}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{T}_{sm}$$

$$\overline{\boldsymbol{M}}_{mm} \ddot{\boldsymbol{x}}_m + \overline{\boldsymbol{K}}_{mm} \boldsymbol{x}_m = \overline{\boldsymbol{F}}_m, \qquad \overline{\boldsymbol{F}}_m = \boldsymbol{T}_{sm}^T \boldsymbol{F}$$

Per le vibrazioni libere:

$$\left(\overline{\boldsymbol{K}}_{mm} - \lambda_i \overline{\boldsymbol{M}}_{mm}\right) \boldsymbol{\phi}_{m_i} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\phi}_{GR_i} = \boldsymbol{T}_{sm} \boldsymbol{\phi}_{m_i}$$

Scelta dei gradi di libertà master

Condensazione statica

Dove conviene conservarli

- masse significative;
- punti di applicazione dei carichi;
- interfacce tra sottosistemi;
- zone nelle quali interessa direttamente la risposta.

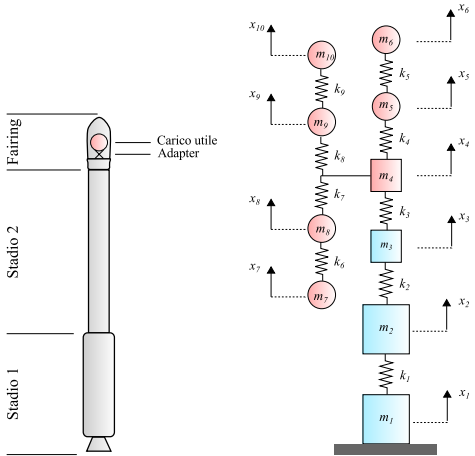
Limite della Guyan reduction

La trasformazione dipende dalla sola rigidezza e trascura l'inerzia degli slave nella costruzione della base. La riduzione è quindi esatta nel problema statico, ma approssimata in dinamica.

Criterio di scelta

La selezione deve essere coerente con la banda di frequenze e con le forme modali che si vogliono preservare.

Esempio: modello lanciatore–payload a 10 g.d.l.



Masse concentrate

$$m_1 = 445 \text{ t}, \quad m_2 = 116 \text{ t}, \quad m_3 = 3 \text{ t},$$
$$m_4 = 4.5 \text{ t}, \quad m_5 = 3 \text{ t},$$
$$m_6 = m_7 = m_8 = m_9 = m_{10} = 1.5 \text{ t}.$$

Rigidezze equivalenti

$$k_1 = k_2 = 5 \times 10^8 \text{ N/m},$$
$$k_3 = k_4 = k_7 = k_8 = 1 \times 10^8 \text{ N/m},$$
$$k_5 = k_6 = k_9 = 0.5 \times 10^8 \text{ N/m}.$$

$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ 9 g.d.l. dinamici

$$\boldsymbol{x}_m = \{x_2,\, x_6,\, x_7,\, x_{10}\}^T$$

Problema agli autovalori e frequenze naturali

Esempio numerico: Guyan reduction

Sistema completo

$$(\boldsymbol{K} - \lambda_i \boldsymbol{M})\, \boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{0}$$

Sistema ridotto

$$\left(\overline{\boldsymbol{K}}_{mm} - \lambda_i \overline{\boldsymbol{M}}_{mm}\right) \boldsymbol{\phi}_{m_i} = \boldsymbol{0}$$

Modo	Modello completo [Hz]	Modello ridotto [Hz]	Differenza [%]
1	8.77	8.97	2.3
2	12.68	13.16	3.8
3	21.23	21.87	3.0
4	22.24	22.51	1.2

La Guyan reduction fornisce una buona approssimazione delle prime frequenze naturali.

Forme modali del modello ridotto

Esempio numerico: Guyan reduction

Gli autovettori ottenuti dal problema ridotto sono definiti nelle sole coordinate master. Le forme modali nelle coordinate fisiche complete si ricostruiscono mediante

$$\boxed{\boldsymbol{\phi}_{GR_i} = \boldsymbol{T}_{sm}\boldsymbol{\phi}_{m_i}}$$

Matrice modale ricostruita nelle coordinate complete

$$\boldsymbol{\Phi}_{GR} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3169 & -0.2169 & 0.0015 & 0.0000 \\ 0.3763 & -0.1120 & -0.0040 & 0.0000 \\ 0.6734 & 0.4124 & -0.0316 & 0.0000 \\ 0.7823 & 0.6083 & 0.3123 & 0.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.9557 & 0.9053 & -0.5887 & -1.0000 \\ 0.7675 & 0.5767 & -0.2173 & -0.3333 \\ 0.7675 & 0.5767 & -0.2173 & 0.3333 \\ 0.9557 & 0.9053 & -0.5887 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Si lascia allo studente il calcolo della matrice dei modi del modello originale; Il confronto tra i due modelli non deve limitarsi alle frequenze: occorre verificare anche la correlazione tra le **forme modali**.

MAC e COC: correlazione tra forme modali

Modal Assurance Criterion

$$\mathrm{MAC}_{ij} = \frac{|\boldsymbol{\phi}_{A_i}^T \boldsymbol{\phi}_{B_j}|^2}{(\boldsymbol{\phi}_{A_i}^T \boldsymbol{\phi}_{A_i})(\boldsymbol{\phi}_{B_j}^T \boldsymbol{\phi}_{B_j})}$$

- $0 \leq \mathrm{MAC} \leq 1$;
- indipendente dalla normalizzazione;
- misura la somiglianza geometrica dei modi.

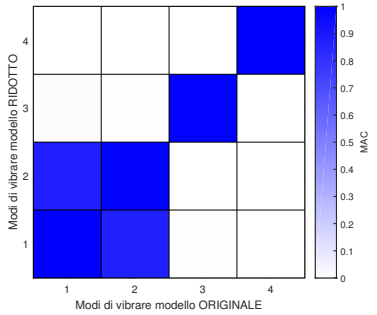
Cross Orthogonality Check

$$\mathrm{COC}_{ij} = \frac{\boldsymbol{\phi}_{A_i}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_{B_j}}{\sqrt{\boldsymbol{\phi}_{A_i}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_{A_i}} \sqrt{\boldsymbol{\phi}_{B_j}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_{B_j}}}$$

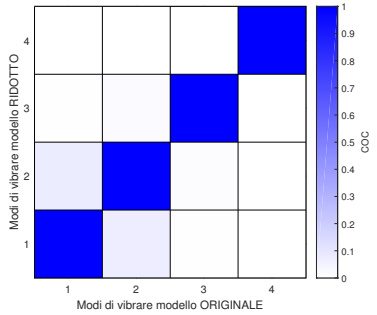
- introduce la pesatura inerziale;
- si considera in genere $|\mathrm{COC}_{ij}|$;
- entrambi richiedono coordinate fisiche compatibili.

Correlazione del modello ridotto

Validazione modale



MAC



COC

Lettura dei risultati

Valori prossimi all'unità sulla diagonale indicano una buona corrispondenza. Nell'esempio il MAC mostra una correlazione elevata anche tra i primi due modi; il COC, includendo la matrice di massa, li distingue più chiaramente.

Riduzione dinamica di Craig–Bampton

Il metodo di Craig–Bampton è una tecnica di **Component Mode Synthesis**: mantiene esplicitamente i gradi di libertà d'interfaccia e sostituisce la dinamica interna con un numero limitato di coordinate modali.

Coordinate fisiche

$$\boldsymbol{x}_m$$

Gradi di libertà dell'interfaccia, necessari per l'accoppiamento con altre sottostrutture.

Coordinate modali

$$\boldsymbol{\eta}_p$$

Coordinate associate a un insieme troncato di modi interni a interfaccia bloccata.

moto interno = contributo statico di vincolo + contributo modale

Modi statici di vincolo

Craig–Bampton

I *constraint modes* descrivono la deformazione interna prodotta da spostamenti imposti ai gradi di libertà d'interfaccia.

$$\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{G}_{sm}\boldsymbol{x}_m, \qquad \boldsymbol{G}_{sm} = -\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{K}_{sm}$$

Contributo statico

$$\boldsymbol{x}_C = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{G}_{sm} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}_C} \boldsymbol{x}_m$$

La stessa relazione di Guyan viene qui utilizzata per descrivere **solo il contributo quasi-statico** associato al moto dell'interfaccia.

Modi normali a interfaccia bloccata

Craig–Bampton

Si impone $\boldsymbol{x}_m = \mathbf{0}$ e si risolve il problema modale dei soli gradi di libertà interni:

$$\boxed{\left(\boldsymbol{K}_{ss} - \lambda_i \boldsymbol{M}_{ss}\right) \boldsymbol{\phi}_{s_i} = \mathbf{0}}$$

Si conservano soltanto p modi nella banda di interesse:

$$\boldsymbol{\Phi}_{sp} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{s_1} & \boldsymbol{\phi}_{s_2} & \cdots & \boldsymbol{\phi}_{s_p} \end{bmatrix}$$

Contributo modale interno

$$\boxed{\boldsymbol{x}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Phi}_{sp} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_p}$$

Sommando i due contributi:

Base mista fisico–modale

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{G}_{sm} & \boldsymbol{\Phi}_{sp} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Psi}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}_m \\ \boldsymbol{\eta}_p \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{X}$$

interfaccia
coordinate fisiche $\boldsymbol{x}_m$

interno
coordinate modali $\boldsymbol{\eta}_p$

Matrici ridotte Craig–Bampton

Proiettando l'equazione del moto sulla base $\boldsymbol{\Psi}$:

$$\boldsymbol{M}_{CB}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}_{CB}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_{CB}, \qquad \boldsymbol{M}_{CB} = \boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Psi}, \quad \boldsymbol{K}_{CB} = \boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Psi}$$

dove

$$\boldsymbol{M}_{CB} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{M}}_{mm} & \boldsymbol{M}_{mp} \\ \boldsymbol{M}_{pm} & \boldsymbol{M}_g \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K}_{CB} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{K}}_{mm} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_g \end{bmatrix}$$

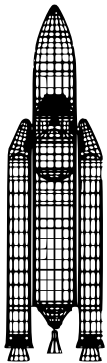
Struttura e dimensione

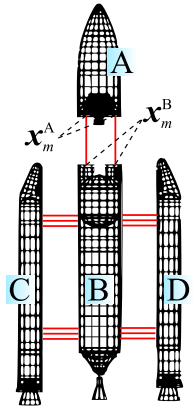
L'accoppiamento elastico interfaccia–modi interni è nullo per costruzione; rimane in generale quello inerziale. Se il modello originale ha $m + s$ g.d.l. e si conservano p modi interni, il modello ridotto ha un numero di g.d.l. pari a:

$$\boxed{m + p, \qquad p \leq s}$$

Substructuring dinamico e modularità







Una struttura complessa viene suddivisa in componenti analizzate separatamente e successivamente accoppiate.

Vantaggi

- riduzione del costo computazionale;
- modularità e riuso dei sottomodelli;
- scambio di modelli ridotti tra organizzazioni;
- studio di configurazioni differenti.

Per due componenti A e B descritte mediante modelli Craig–Bampton, prima dell'accoppiamento il sistema è a blocchi diagonali:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{CB}^{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{M}_{CB}^{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{X}}^{A} \\ \ddot{\boldsymbol{X}}^{B} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{CB}^{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{K}_{CB}^{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}^{A} \\ \boldsymbol{X}^{B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_{CB}^{A} \\ \boldsymbol{F}_{CB}^{B} \end{Bmatrix}$$

Manca ancora l'accoppiamento

I gradi di libertà fisici delle due interfacce sono ancora indipendenti: occorre imporre **compatibilità cinematica** ed **equilibrio delle forze**.

Assumendo lo stesso ordinamento e orientazione dei gradi di libertà d'interfaccia:

$$\boxed{\boldsymbol{x}_m^A = \boldsymbol{x}_m^B = \boldsymbol{x}_m}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\text{tot}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}_m^A \\ \boldsymbol{\eta}_p^A \\ \boldsymbol{x}_m^B \\ \boldsymbol{\eta}_p^B \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\text{red}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}_m \\ \boldsymbol{\eta}_p^A \\ \boldsymbol{\eta}_p^B \end{Bmatrix}$$

Matrice di assemblaggio

$$\boldsymbol{Q}_{\text{tot}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{Q}_{\text{red}}$$

Sostituendo la trasformazione di compatibilità e premoltiplicando per $\boldsymbol{L}^T$:

Equazione del moto assemblata

$$\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{M}_{\text{tot}} \boldsymbol{L}\, \ddot{\boldsymbol{Q}}_{\text{red}} + \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{K}_{\text{tot}} \boldsymbol{L}\, \boldsymbol{Q}_{\text{red}} = \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{F}_{\text{tot}}$$

- i contributi di A e B associati ai gradi di libertà comuni vengono assemblati;
- le coordinate modali interne delle due sottostrutture rimangono distinte;
- la premoltiplicazione per $\boldsymbol{L}^T$ realizza anche l'assemblaggio delle forze all'interfaccia.