CAPITOLO 7

Modelli per strutture laminate in materiale composito

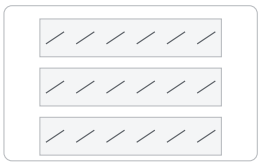
Alfonso Pagani

MUL^2 Lab – Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
Politecnico di Torino

Strutture multistrato

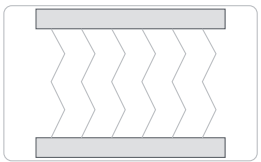
Architetture e classificazione

Una struttura multistrato presenta, lungo lo spessore, **strati o sottocomponenti con proprietà differenti**. La sequenza degli strati diventa quindi una variabile di progetto.



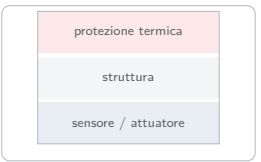
Laminati compositi

lamine anisotrope, stacking sequence



Strutture sandwich

pelli rigide + core leggero



Multifunzionali

termiche, smart, piezoelettriche



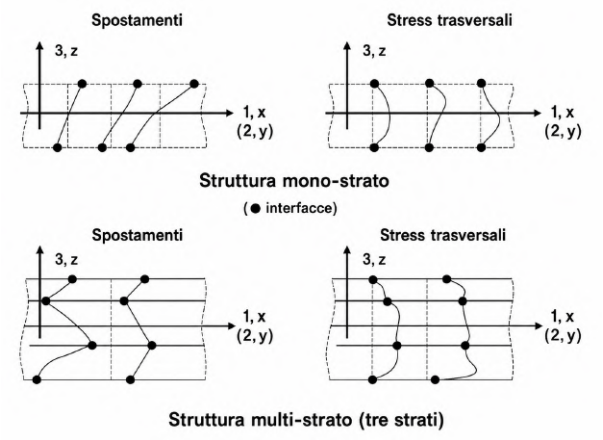
FGM

proprietà variabili con continuità

Problema comune: descrivere correttamente la variazione dei campi meccanici attraverso lo spessore e alle interfacce.

Requisiti C_z^0

Continuità interlaminare



Per strati perfettamente aderenti:

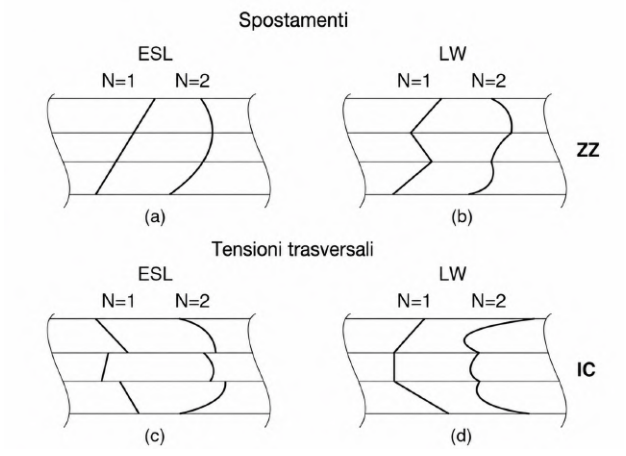
- gli **spostamenti** sono continui alle interfacce;
- le loro derivate rispetto a z possono cambiare bruscamente: comportamento *zig-zag* (ZZ);
- le **tensioni trasversali** devono soddisfare la continuità interlaminare (IC).

Requisiti C_z^0

Spostamenti e tensioni trasversali sono continui lungo lo spessore, pur potendo avere un andamento a tratti.

Modelli attraverso lo spessore

ESL, zig-zag e Layer-Wise



Equivalent-Single-Layer

Un unico insieme di variabili generalizzate descrive l'intero laminato; il numero di incognite è sostanzialmente indipendente dal numero di strati.

Zig-zag

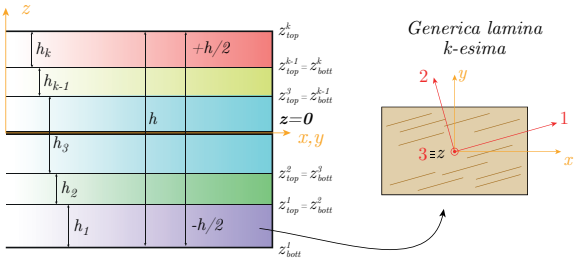
Arricchisce una descrizione ESL introducendo bruschi cambi di pendenza degli spostamenti alle interfacce.

Layer-Wise

La cinematica è descritta a livello dei singoli strati: maggiore accuratezza locale, ma un numero di variabili che cresce con N_l.

Piastra di Reissner–Mindlin laminata

Estensione della formulazione FSDT



Consideriamo N_l lamine perfettamente aderenti:

$$h_k = z^k_{top} - z^k_{bott}, \qquad h = \sum_{k=1}^{N_l} h_k$$

con piano medio alla quota $z = 0$.

Idea della formulazione

La cinematica FSDT rimane *Equivalent-Single-Layer*; ciò che cambia da lamina a lamina è la legge costitutiva, per effetto del materiale e dell'orientazione delle fibre.

$\mathbb{C} = \mathbb{C}(z)$ **a tratti lungo lo spessore**

Lamina ortotropa

Legge costitutiva nel sistema materiale $(1, 2, 3)$

Nel sistema principale della lamina, con 1 lungo le fibre e 3 lungo lo spessore:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}^{123,k}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

Ortotropia

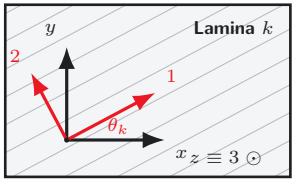
Tre direzioni materiali principali mutuamente ortogonali; in tali assi non compaiono accoppiamenti normale–taglio.

Costanti ingegneristiche

E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23} e coefficienti di Poisson, con relazioni di reciprocità.

Dalla lamina al sistema globale

Orientazione delle fibre



Nel sistema materiale

La lamina è ortotropa: le direzioni 1 e 2 coincidono con le direzioni principali del materiale.

$$\theta_k = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{16} = Q_{26} = Q_{45} = 0$$

Nel sistema globale

Una lamina ruotata può presentare accoppiamenti tra componenti normali e taglio nel piano e tra le componenti di taglio trasverso:

$$Q^k_{16}, \quad Q^k_{26}, \quad Q^k_{45} \neq 0$$

La k-esima lamina è ruotata di un angolo θ_k rispetto agli assi globali della piastra. La legge costitutiva deve quindi essere riportata nel sistema comune (x, y, z):

$$\boxed{\mathbb{C}^{xyz,k} = \mathbf{T}^k\, \mathbb{C}^{123,k}\, \mathbf{T}^{k\,T}}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & Q_{26} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & Q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{36} & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}^{xyz,k}_{mat}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

La stacking sequence determina quindi anche gli accoppiamenti del laminato.

Nota: Nel caso di stato di tensione *plane stress*, i coefficienti del materiale Q_{ij} vanno "ridotti." Lo vedremo dopo quando parleremo del *Poisson locking*.

Componenti costitutive nella FSDT

Parte in-plane e taglio trasverso

Per la piastra di Reissner–Mindlin è utile separare la legge costitutiva della k-esima lamina in due blocchi:

Risposta in-plane

$$\mathbb{C}_{ip}^{k} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{k} & Q_{12}^{k} & Q_{16}^{k} \\ Q_{12}^{k} & Q_{22}^{k} & Q_{26}^{k} \\ Q_{16}^{k} & Q_{26}^{k} & Q_{66}^{k} \end{bmatrix}$$

governa risposta membranale e flessionale.

Taglio trasverso

$$\mathbb{C}_{op}^{k} = \begin{bmatrix} Q_{44}^{k} & Q_{45}^{k} \\ Q_{45}^{k} & Q_{55}^{k} \end{bmatrix}$$

governa γ_{xz} e γ_{yz}.

Dipendenza dallo spessore

$\mathbb{C}_{ip}^{k}$ e $\mathbb{C}_{op}^{k}$ cambiano da lamina a lamina per effetto di materiale e orientazione θ_k: l'integrazione nello spessore deve quindi essere effettuata per strati.

Lavoro virtuale interno del laminato

Membrana, flessione e taglio trasverso

La cinematica FSDT rimane quella già introdotta:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ip} = \mathbf{B}_{ip}^{m}\hat{\mathbf{u}}_m + z\mathbf{B}_{ip}^{f}\hat{\mathbf{u}}_f, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{op} = \mathbf{B}_{op}^{f}\hat{\mathbf{u}}_f$$

$$\delta\mathcal{L}_{int} = \underbrace{\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{ip}^T \mathbb{C}_{ip}\boldsymbol{\varepsilon}_{ip}\, dV}_{\delta\mathcal{L}_{int}^{ip}} + \underbrace{\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{op}^T \mathbb{C}_{op}\boldsymbol{\varepsilon}_{op}\, dV}_{\delta\mathcal{L}_{int}^{op}}$$



La stratificazione entra attraverso i momenti di $\mathbb{C}(z)$ lungo lo spessore.

Matrici generalizzate del laminato

Integrazione lungo lo spessore

$$\mathbb{A}_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbb{C}_{ij}\, dz = \sum_{k=1}^{N_l} \mathbb{C}_{ij}^k \left(z_{top}^k - z_{bott}^k\right)$$

$$\mathbb{B}_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} z\mathbb{C}_{ij}\, dz = \sum_{k=1}^{N_l} \frac{1}{2}\mathbb{C}_{ij}^k \left[\left(z_{top}^k\right)^2 - \left(z_{bott}^k\right)^2\right]$$

$$\mathbb{D}_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2\mathbb{C}_{ij}\, dz = \sum_{k=1}^{N_l} \frac{1}{3}\mathbb{C}_{ij}^k \left[\left(z_{top}^k\right)^3 - \left(z_{bott}^k\right)^3\right]$$

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{D}$
rigidezza membranale	accoppiamento membrana–flessione	rigidezza flessionale

Per un laminato simmetrico rispetto al piano medio: $\boxed{\mathbb{B} = \mathbf{0}}$

Rigidezza dell'elemento laminato

Contributi membranali, flessionali e di taglio

$$\mathbf{K}_{mm} = \int_{\Sigma} (\mathbf{B}_{ip}^{m})^{T} \mathbb{A}_{ip} \mathbf{B}_{ip}^{m} \, d\Sigma$$

$$\mathbf{K}_{mf} = \int_{\Sigma} (\mathbf{B}_{ip}^{m})^{T} \mathbb{B}_{ip} \mathbf{B}_{ip}^{f} \, d\Sigma$$

$$\mathbf{K}_{fm} = \int_{\Sigma} (\mathbf{B}_{ip}^{f})^{T} \mathbb{B}_{ip} \mathbf{B}_{ip}^{m} \, d\Sigma$$

$$\mathbf{K}_{ff}^{ip} = \int_{\Sigma} (\mathbf{B}_{ip}^{f})^{T} \mathbb{D}_{ip} \mathbf{B}_{ip}^{f} \, d\Sigma$$

$$\mathbf{K}_{ff}^{op} = \int_{\Sigma} (\mathbf{B}_{op}^{f})^{T} \mathbb{A}_{op} \mathbf{B}_{op}^{f} \, d\Sigma$$

Matrice dell'elemento

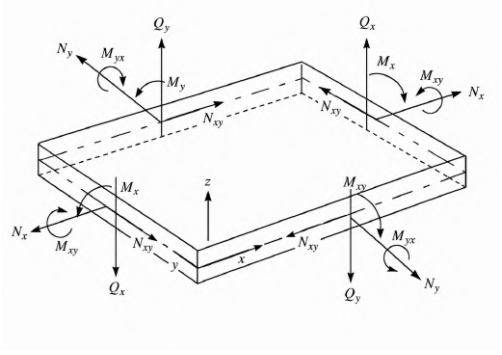
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{mf} \\ \mathbf{K}_{fm} & \mathbf{K}_{ff}^{ip} + \mathbf{K}_{ff}^{op} \end{bmatrix}$$

Effetto della laminazione

A differenza del caso isotropo simmetrico, $\mathbf{K}_{mf}$ e $\mathbf{K}_{fm}$ possono essere non nulli. L'accoppiamento è governato da $\mathbb{B}_{ip}$.

Risultanti di tensione

Forma compatta della legge costitutiva del laminato



$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{B} & \mathbb{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}$$

con

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

Per il taglio trasverso:

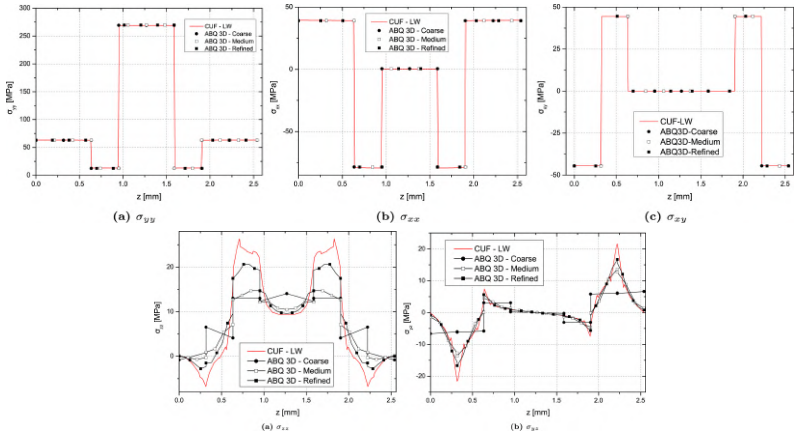
$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \mathbb{A}_{op} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

Interpretazione

L'integrazione lungo lo spessore è incorporata nelle rigidezze generalizzate $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{D}$ e $\mathbb{A}_{op}$.

Esempi di stati di tensione

Laminato $[45/-45/90/0]_s$: tensioni attraverso lo spessore



In-plane: andamento a tratti governato dall'orientazione delle lamine; **Out-of-plane:** forti gradienti e picchi in prossimità del bordo libero; la previsione accurata richiede modelli LW o 3D raffinati.