CAPITOLO 10

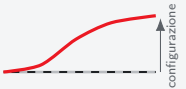
Analisi non lineare delle strutture

Alfonso Pagani

MUL^2 Lab – Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
Politecnico di Torino

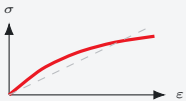
Classificazione delle non linearità

Geometrica



Grandi spostamenti e rotazioni: la cinematica dipende dalla configurazione deformata.

Materiale



La legge costitutiva non è lineare: plasticità, viscoelasticità, danneggiamento, ecc.

Contatto



Le condizioni di vincolo cambiano: contatto, distacco, impenetrabilità, attrito.

Nel seguito: non linearità geometrica, materiale elastico lineare.

Non linearità geometrica

Spostamenti e rotazioni finiti

In un contesto di non linearità di tipo geometrico, le componenti di deformazione puramente non lineari del tensore di Green-Lagrange ($\mathbf{H}^T\mathbf{H}$) non sono più trascurabili. In forma compatta, introducendo le *matrici formali degli operatori di derivazione*, si ha:

$$\boxed{\varepsilon = (\mathbf{b}_l + \mathbf{b}_{nl})\mathbf{u} = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl}}$$

con

Operatore lineare

$$\mathbf{b}_l = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix}$$

Operatore non lineare

$$\mathbf{b}_{nl} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u_{x,x}\partial_x & \frac{1}{2}u_{y,x}\partial_x & \frac{1}{2}u_{z,x}\partial_x \\ \frac{1}{2}u_{x,y}\partial_y & \frac{1}{2}u_{y,y}\partial_y & \frac{1}{2}u_{z,y}\partial_y \\ \frac{1}{2}u_{x,z}\partial_z & \frac{1}{2}u_{y,z}\partial_z & \frac{1}{2}u_{z,z}\partial_z \\ u_{x,x}\partial_z & u_{y,x}\partial_z & u_{z,x}\partial_z \\ u_{x,y}\partial_z & u_{y,y}\partial_z & u_{z,y}\partial_z \\ u_{x,x}\partial_y & u_{y,x}\partial_y & u_{z,x}\partial_y \end{bmatrix}$$

$\partial_i \equiv \dfrac{\partial(\cdot)}{\partial i}$ $\quad$ **$\mathbf{b}_{nl}$ dipende dal campo di spostamento e quindi dalla configurazione corrente.**

Variazione virtuale delle deformazioni

Il fattore 2 nella linearizzazione dei termini quadratici

Per la componente normale di Green–Lagrange:

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} + \frac{1}{2}\left(u_{x,x}^2 + u_{y,x}^2 + u_{z,x}^2\right)$$

La perturbazione virtuale $\mathbf{u} \to \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ fornisce

$$\varepsilon_{xx}(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}) = \frac{\partial(u_x+\delta u_x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial(u_x+\delta u_x)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(u_y+\delta u_y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(u_z+\delta u_z)}{\partial x}\right)^2\right]$$

da cui, essendo $\delta\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u}) - \varepsilon_{xx}(\mathbf{u})$ e trascurando i termini $\mathcal{O}(\delta\mathbf{u}^2)$:

$$\boxed{\delta\varepsilon_{xx} = \delta u_{x,x} + u_{x,x}\delta u_{x,x} + u_{y,x}\delta u_{y,x} + u_{z,x}\delta u_{z,x}}$$

In forma compatta:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{b}_l^d + \mathbf{b}_{nl}^d)\delta\mathbf{u}.$$

Confronto con la deformazione reale

$$\boxed{\mathbf{b}_l^d = \mathbf{b}_l, \qquad \mathbf{b}_{nl}^d = 2\mathbf{b}_{nl}}$$

Quindi

$$\boxed{\delta\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{b}_l + 2\mathbf{b}_{nl})\delta\mathbf{u}}$$

Matrice di rigidezza secante

Dal Principio dei Lavori Virtuali ai quattro contributi

Dall'espressione del lavoro virtuale interno

$$\delta\mathcal{L}_{int} = \int_\Omega (\delta\boldsymbol{\varepsilon}_l + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{nl})^T \mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_{nl})\, dV$$

sostituendo le relazioni geometriche n-l, una legge costitutiva per materiale elastico lineare, e adottando un generico modello FEM, come ad esempio l'elemento piastra di Reissner-Mindlin, è possibile identificare quattro contributi alla matrice di rigidezza:

$$\mathbf{K}_{ll} = \int_\Omega \mathbf{B}_l^T \mathbb{C} \mathbf{B}_l\, dV \qquad \mathbf{K}_{nll} = \int_\Omega 2\mathbf{B}_{nl}^T \mathbb{C} \mathbf{B}_l\, dV$$

$$\mathbf{K}_{lnl} = \int_\Omega \mathbf{B}_l^T \mathbb{C} \mathbf{B}_{nl}\, dV \qquad \mathbf{K}_{nlnl} = \int_\Omega 2\mathbf{B}_{nl}^T \mathbb{C} \mathbf{B}_{nl}\, dV$$

Discretizzazione

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\hat{\mathbf{u}}, \qquad \mathbf{B}_l = \mathbf{b}_l\mathbf{N}, \qquad \mathbf{B}_{nl} = \mathbf{b}_{nl}\mathbf{N}$$

Il fattore 2 compare soltanto nei contributi che derivano dalla **variazione virtuale non lineare**.

Matrice di rigidezza secante

Forze interne ed equilibrio nella configurazione deformata

Il lavoro virtuale interno diventa

$$\delta\mathcal{L}_{int} = \delta\hat{\mathbf{u}}^T\mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}$$

con

$$\boxed{\mathbf{K}_S = \mathbf{K}_{ll} + \mathbf{K}_{lnl} + \mathbf{K}_{nll} + \mathbf{K}_{nlnl}}$$

_____ Nota:

Poiché

$$\boxed{\mathbf{K}_{nll} = 2\mathbf{K}_{lnl}^T}$$

la matrice secante è, in generale, **non simmetrica**.

Introducendo

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}$$

e

$$\delta\mathcal{L}_{ext} = \delta\hat{\mathbf{u}}^T\mathbf{F}$$

il PLV conduce a

$$\boxed{\mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}}$$

Differenza rispetto al caso lineare

$\mathbf{K}_S$ dipende dalla soluzione attraverso $\mathbf{B}_{nl}$: il sistema non può essere risolto con una singola inversione matriciale.

Linearizzazione del residuo di equilibrio

Si definisce il residuo

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi}_{res}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{F}) = \mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{F}}$$

L'equilibrio richiede

$$\boldsymbol{\varphi}_{res} = \mathbf{0}$$

In una configurazione vicina:

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}^* + \Delta\hat{\mathbf{u}}, \qquad \mathbf{F} = \mathbf{F}^* + \Delta\mathbf{F}$$

Taylor al primo ordine:

$$\boldsymbol{\varphi}^*_{res} + \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{res}}{\partial \hat{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{K}_T} \Delta\hat{\mathbf{u}} - \Delta\mathbf{F} \simeq \mathbf{0}$$

Per carichi proporzionali

$$\mathbf{F}^* = \lambda^* \mathbf{F}_{ref}, \qquad \Delta\mathbf{F} = \Delta\lambda\, \mathbf{F}_{ref},$$

si ottiene

$$\boxed{\mathbf{K}_T(\hat{\mathbf{u}}^*)\Delta\hat{\mathbf{u}} = \Delta\lambda\, \mathbf{F}_{ref} - \boldsymbol{\varphi}^*_{res}}$$

$\mathbf{K}_T$ è la linearizzazione locale delle equazioni di equilibrio.

Matrice di rigidezza tangente

Linearizzazione del lavoro virtuale interno

La matrice di rigidezza tangente si ottiene linearizzando il vettore delle forze interne rispetto agli incrementi di spostamento:

$$\Delta(\delta\mathcal{L}_{int}) = \Delta\left(\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\,dV\right)$$

Contributo materiale

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\Delta\boldsymbol{\sigma}\,dV$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{b}_l + 2\mathbf{b}_{nl})\Delta\mathbf{u}$$

Contributo geometrico

$$\int_\Omega \Delta(\delta\boldsymbol{\varepsilon})^T\boldsymbol{\sigma}\,dV$$

Nasce dalla dipendenza della cinematica non lineare dalla configurazione deformata e dallo **stato tensionale corrente**.

$$\boxed{\Delta(\delta\mathcal{L}_{int}) = \delta\hat{\mathbf{u}}^T\left(\mathbf{K}_T^{mat} + \mathbf{K}_\sigma\right)\Delta\hat{\mathbf{u}}}$$

Matrice di rigidezza tangente

Contributo materiale

Dopo discretizzazione:

$$\boxed{\mathbf{K}_T^{mat} = \mathbf{K}_{T,ll} + \mathbf{K}_{T,lnl} + \mathbf{K}_{T,nll} + \mathbf{K}_{T,nlnl}}$$

$$\mathbf{K}_{T,ll} = \int_\Omega \mathbf{B}_l^T \mathbb{C} \mathbf{B}_l \, dV \qquad \mathbf{K}_{T,nll} = \int_\Omega (2\mathbf{B}_{nl})^T \mathbb{C} \mathbf{B}_l \, dV$$

$$\mathbf{K}_{T,lnl} = \int_\Omega \mathbf{B}_l^T \mathbb{C} (2\mathbf{B}_{nl}) \, dV \qquad \mathbf{K}_{T,nlnl} = \int_\Omega (2\mathbf{B}_{nl})^T \mathbb{C} (2\mathbf{B}_{nl}) \, dV$$

Osservazione

Per $\mathbb{C} = \mathbb{C}^T$ il contributo materiale della tangente è **simmetrico**: i termini misti compaiono come coppia trasposta con lo stesso coefficiente.

Matrice di rigidezza tangente

Contributo geometrico

Applichiamo una variazione incrementale alla variazione virtuale della deformazione:

$$\delta\varepsilon_{xx} = \delta u_{x,x} + u_{x,x}\delta u_{x,x} + u_{y,x}\delta u_{y,x} + u_{z,x}\delta u_{z,x}$$

$$\Rightarrow \Delta(\delta\varepsilon_{xx}) = \Delta u_{x,x}\delta u_{x,x} + \Delta u_{y,x}\delta u_{y,x} + \Delta u_{z,x}\delta u_{z,x}$$

Dopo discretizzazione agli elementi finiti, il termine $\Delta(\delta\varepsilon_{xx})$ può essere scritto come

$$\Delta(\delta\varepsilon_{xx}) = \sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_n} N_{i,x}N_{j,x}\left(\delta\hat{u}_x^{\,i}\Delta\hat{u}_x^{\,j} + \delta\hat{u}_y^{\,i}\Delta\hat{u}_y^{\,j} + \delta\hat{u}_z^{\,i}\Delta\hat{u}_z^{\,j}\right)$$

dove N_n è il numero di nodi dell'elemento, mentre $\hat{u}_x^i$, $\hat{u}_y^i$ e $\hat{u}_z^i$ indicano le componenti di spostamento nodale del nodo i. Similmente le componenti per il nodo j. In modo analogo si possono scrivere le altre componenti del vettore $\Delta(\delta\boldsymbol{\varepsilon})$.
In forma compatta, il vettore $\Delta(\delta\boldsymbol{\varepsilon})$ può quindi essere rappresentato come

$$\Delta(\delta\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{B}_{nl}^{*}\begin{Bmatrix}\Delta\hat{u}_x\delta\hat{u}_x\\ \Delta\hat{u}_y\delta\hat{u}_y\\ \Delta\hat{u}_z\delta\hat{u}_z\end{Bmatrix}$$

Matrice di rigidezza tangente

Rigidezza geometrica e forma finale

$$\mathbf{B}_{nl}^{*(ij)} = \begin{bmatrix} N_{i,x}N_{j,x} & N_{i,x}N_{j,x} & N_{i,x}N_{j,x} \\ N_{i,y}N_{j,y} & N_{i,y}N_{j,y} & N_{i,y}N_{j,y} \\ N_{i,z}N_{j,z} & N_{i,z}N_{j,z} & N_{i,z}N_{j,z} \\ N_{i,z}N_{j,x} + N_{i,x}N_{j,z} & N_{i,z}N_{j,x} + N_{i,x}N_{j,z} & N_{i,z}N_{j,x} + N_{i,x}N_{j,z} \\ N_{i,z}N_{j,y} + N_{i,y}N_{j,z} & N_{i,z}N_{j,y} + N_{i,y}N_{j,z} & N_{i,z}N_{j,y} + N_{i,y}N_{j,z} \\ N_{i,y}N_{j,x} + N_{i,x}N_{j,y} & N_{i,y}N_{j,x} + N_{i,x}N_{j,y} & N_{i,y}N_{j,x} + N_{i,x}N_{j,y} \end{bmatrix}$$

Rigidezza geometrica

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_\Omega \mathrm{diag}\left(\mathbf{B}_{nl}^{*T}\boldsymbol{\sigma}\right) dV$$

Il contributo geometrico dipende direttamente dallo **stato tensionale corrente**.

Combinando i due contributi:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_T^{mat} + \mathbf{K}_\sigma$$

$$\Delta\mathbf{F}_{int} \simeq \mathbf{K}_T \Delta\hat{\mathbf{u}}$$

Interpretazione

La secante collega posizione e forza interna; la tangente descrive la **variazione locale** delle forze interne attorno alla configurazione corrente.

Esempio di calcolo semplificato

Cinematica non lineare a due gradi di libertà

Consideriamo

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix}, \qquad \boxed{\varepsilon = U + 2V^2}$$

Ovvero

$$\varepsilon_l = U, \qquad \varepsilon_{nl} = 2V^2$$

Materiale elastico lineare con rigidezza unitaria:

$$\sigma = Q\varepsilon, \qquad Q = 1$$

La stessa relazione si scrive

$$\varepsilon = \mathbf{B}_l \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_{nl} \hat{\mathbf{u}}$$

con

$$\mathbf{B}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_{nl} = \begin{bmatrix} 0 & 2V \end{bmatrix}$$

La variazione virtuale è

$$\boxed{\delta\varepsilon = \delta U + 4V\delta V}$$

e quindi

$$\mathbf{B}_{nl}^d = \begin{bmatrix} 0 & 4V \end{bmatrix} = 2\mathbf{B}_{nl}$$

Esempio di calcolo semplificato

Variazione prima: matrice secante

Poiché

$$\sigma = \varepsilon = U + 2V^2$$

la variazione prima dell'energia di deformazione si scrive:

$$\delta\phi = \sigma\,\delta\varepsilon = (U + 2V^2)(\delta U + 4V\delta V)$$

Sviluppando:

$$\delta\phi = (U + 2V^2)\delta U + (4UV + 8V^3)\delta V$$

Scrivendo

$$\delta\phi = \delta\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}_S \hat{\mathbf{u}}$$

si ottiene

$$\boxed{\mathbf{K}_S = \begin{bmatrix} 1 & 2V \\ 4V & 8V^2 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\mathbf{F}_{int} = \mathbf{K}_S \hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} U + 2V^2 \\ 4UV + 8V^3 \end{Bmatrix}}$$

La secante è **non simmetrica**.

Esempio di calcolo semplificato

Variazione seconda: matrice tangente

Dalla variazione incrementale di $\delta\phi$:

$$\Delta(\delta\phi) = \delta U \Delta U + 4V\delta U\Delta V + 4V\delta V\Delta U + (4U + 24V^2)\delta V\Delta V$$

Pertanto, scrivendo

$$\Delta(\delta\phi) = \delta\hat{\mathbf{u}}^T\mathbf{K}_T\Delta\hat{\mathbf{u}}$$

si ha

$$\boxed{\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} 1 & 4V \\ 4V & 4U + 24V^2 \end{bmatrix}}$$

Lo stesso risultato deriva da

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \hat{\mathbf{u}}}$$

oppure dalla decomposizione

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_T^{mat} + \mathbf{K}_\sigma$$

con

$$\mathbf{K}_T^{mat} = \begin{bmatrix} 1 & 4V \\ 4V & 16V^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4U + 8V^2 \end{bmatrix}$$

La tangente è **simmetrica** per il problema elastico conservativo.

Redistribuzione dei contributi non lineari

Costruzione di una matrice secante simmetrica

La matrice secante non simmetrica può essere sostituita da una matrice simmetrica che produca lo **stesso vettore delle forze interne**:

$$\boxed{\mathbf{K}_S^{sim}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_S\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_{int}}$$

Cerchiamo quindi una matrice della forma

$$\mathbf{K}_S^{sim} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U + 2V^2 \\ 4UV + 8V^3 \end{Bmatrix}$$

Dal confronto delle due componenti:

$$a = 1, \qquad b = 2V, \qquad c = 2U + 8V^2$$

Quindi

$$\boxed{\mathbf{K}_S^{sim} = \begin{bmatrix} 1 & 2V \\ 2V & 2U + 8V^2 \end{bmatrix}}$$

e infatti

$$\mathbf{K}_S^{sim}\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} U + 2V^2 \\ 2UV + (2U + 8V^2)V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U + 2V^2 \\ 4UV + 8V^3 \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_{int}$$