CAPITOLO 12

Alcuni esempi di strutture spaziali in non linearità

Alfonso Pagani

MUL^2 Lab – Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
Politecnico di Torino

Buckling strutturale





Il *buckling* è una **perdita di stabilità dell'equilibrio**: al crescere del carico la struttura può abbandonare la configurazione iniziale e assumere una configurazione deformata differente.

Carattere del fenomeno

Il cambiamento di configurazione può essere globale o locale, reversibile oppure accompagnato da perdita di capacità portante e collasso.

In prossimità della condizione critica, **piccole perturbazioni** possono produrre grandi variazioni della configurazione.

Stabilità dell'equilibrio

Matrice tangente e seconda variazione dell'energia

Una configurazione di equilibrio soddisfa

$$\boldsymbol{\varphi}_{res}(\mathbf{u}, \mathbf{F}) = \mathbf{0}$$

ma l'equilibrio non implica necessariamente stabilità. La risposta a una piccola perturbazione è governata dalla matrice tangente

$$\boxed{\mathbf{K}_T = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{res}}{\partial \mathbf{u}}}$$

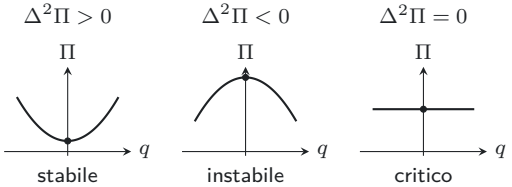
Per un sistema elastico conservativo

$$\Delta^2 \Pi = \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}$$

Condizione critica

$$\boxed{\det \mathbf{K}_T = 0}$$

La matrice tangente perde definitezza positiva e compare una perturbazione non nulla compatibile con l'equilibrio.



Analisi linearizzata di buckling

Problema agli autovalori generalizzato

Si linearizzano le equazioni di equilibrio attorno a una configurazione pre-buckling stabile e sufficientemente regolare. Per una configurazione di riferimento banale:

$$\mathbf{K}_T \simeq \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma^{lin}$$

dove $\mathbf{K}_0$ è la rigidezza elastica lineare e $\mathbf{K}_\sigma^{lin}$ è la rigidezza geometrica costruita dallo **stato tensionale pre-buckling**.

Se il carico è parametrizzato come

$$\mathbf{F} = \lambda \mathbf{F}_{ref}$$

lo stato tensionale e la rigidezza geometrica risultano proporzionali a λ:

$$\mathbf{K}_\sigma^{lin} = \lambda \mathbf{K}_\sigma^{ref}$$

La condizione critica diventa

$$\boxed{\left(\mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_\sigma^{ref}\right) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}}$$

Autovalori λ_i

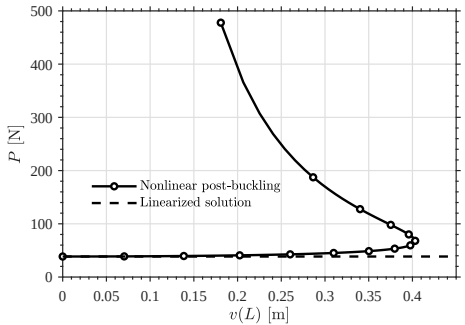
Moltiplicatori critici del carico di riferimento. Il primo autovalore positivo identifica il carico critico linearizzato.

Autovettori $\boldsymbol{\phi}_i$

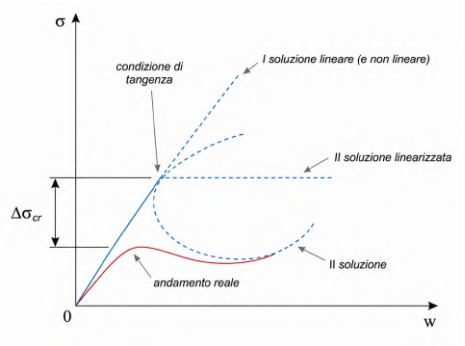
Forme critiche di instabilità: definiscono la direzione della deformata incipiente, non la sua ampiezza post-critica.

Limiti delle soluzioni ideali

Confronto tra un problema regolare e un guscio sensibile alle imperfezioni



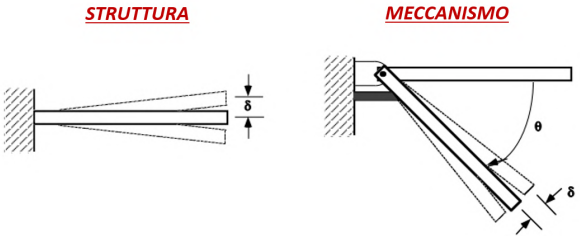
Asta: il primo modo domina e il ramo post-critico della struttura ideale è ben definito.



Cilindro sottile: molti modi possono essere energeticamente vicini; piccole imperfezioni selezionano percorsi differenti e riducono il carico critico effettivo.

Anche la soluzione non lineare della struttura perfetta può non rappresentare la struttura reale.

Buckling come opportunità: meccanismi spaziali



Nei **meccanismi rigidi** il moto è ottenuto mediante cerniere, guide e giunti; la deformabilità strutturale è secondaria.

Nei **meccanismi deformabili elastici** la deformazione è invece parte del principio di funzionamento.

Instabilità progettata

Un cambiamento controllato di configurazione può essere sfruttato per dispiegare, accumulare e rilasciare energia elastica o passare tra stati stabili differenti.

Grandi spostamenti e rotazioni possono quindi essere **funzionali**, purché le deformazioni del materiale rimangano nel campo ammissibile.

Colonne reticolari avvolgibili: *coilable mast*







Strutture reticolari leggere che passano da una configurazione **avvolta e compatta** a una configurazione **estesa e portante**.

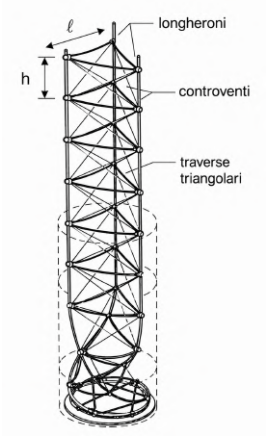
La rigidezza viene ottenuta collegando più longheroni longitudinali mediante traversi e controventi.

Il principio di stipaggio sfrutta la possibilità di deformare elasticamente i longheroni lungo una traiettoria elicoidale.

$$F = \frac{EI\cos^2\alpha}{R^2\sin\alpha}$$

Colonne reticolari avvolgibili: *coilable mast*

Geometria e compromesso di progetto



La configurazione tipica utilizza tre longheroni ai vertici di un triangolo equilatero, traversi triangolari e cavi diagonali di controvento.

Geometria della baia

Un controvento efficiente suggerisce

$$\frac{h}{\ell} \simeq 1$$

mentre requisiti di avvolgimento e stabilità locale portano spesso a

$$\frac{h}{\ell} \simeq \frac{2}{3}$$

Due instabilità

Globale: perdita di stabilità dell'intero mast.

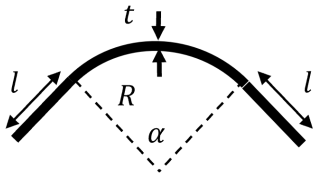
Locale: buckling del singolo longherone tra due traversi consecutivi.

$$P_{max} \simeq \min\left(P_{cr}^{glob}, P_{cr}^{loc}\right)$$

Più baie aumentano il carico locale di buckling ma anche massa e complessità costruttiva.

Gusci ultra-sottili: *tape springs*





Il *tape spring* è una lamina molto sottile, trasversalmente curva, analoga al nastro di un flessometro.

La curvatura iniziale

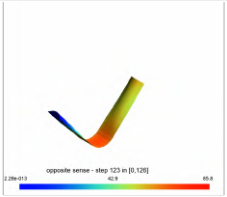
$$\kappa_t = \frac{1}{R}$$

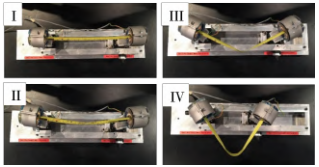
conferisce elevata rigidezza nella configurazione estesa.

Durante la piegatura la sezione può **appiattirsi localmente** e formare una piega concentrata, immagazzinando energia elastica senza richiedere deformazioni permanenti.

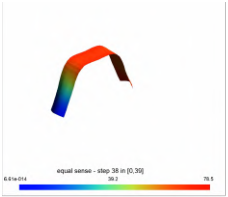
Gusci ultra-sottili: *tape springs*

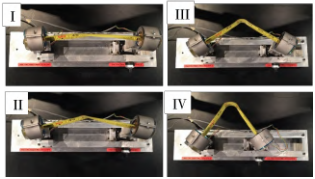
Modi di piegatura





Opposite-sense: momento crescente, innesco della piega localizzata e successiva propagazione a momento quasi costante $M^\star$.



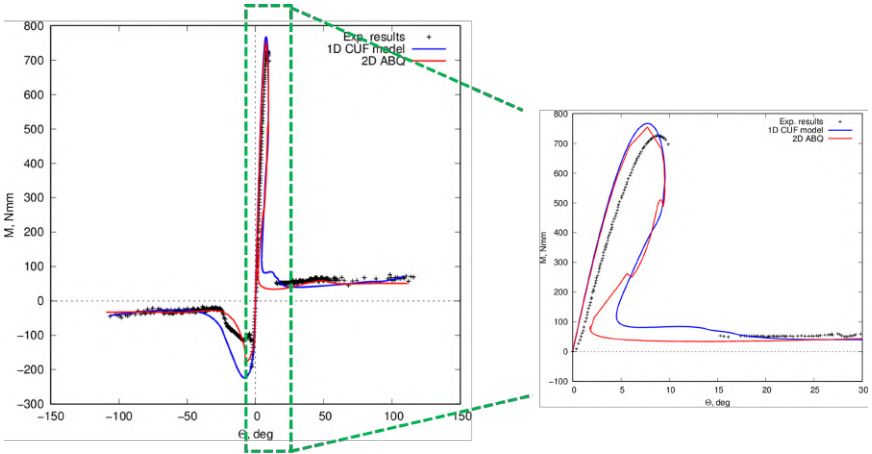


Equal-sense: risposta differente per l'interazione tra flessione, torsione e instabilità locale.

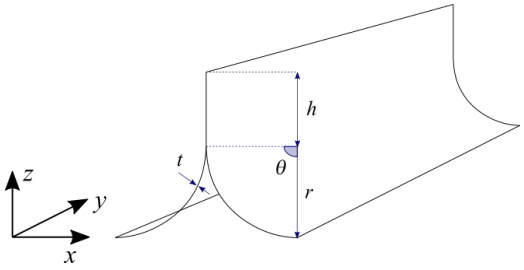
La curva $M - \theta$ non è simmetrica.

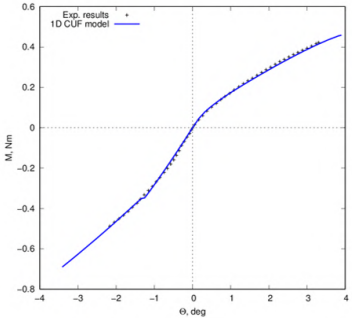
Gusci ultra-sottili: *tape springs*

Risposta momento-rotazione



Boom avvolgibili: *TRAC boom*



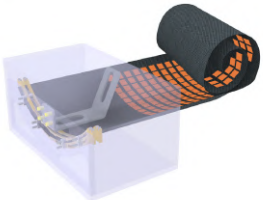


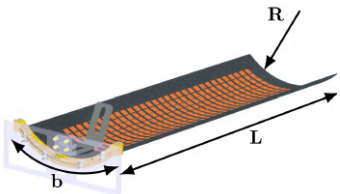
La sezione aperta quasi triangolare nasce da due gusci sottili curvi collegati. La curvatura trasversale fornisce rigidezza in configurazione dispiegata, mentre lo spessore molto ridotto consente il collasso elastico e l'avvolgimento.

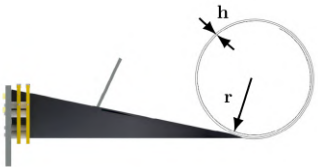
Geometria e laminazione controllano insieme rigidezza, collassabilità e modi di instabilità. Anche qui la risposta dipende dal **segno del momento applicato**.

Dinamica di dispiegamento di un *tape spring*

Fase di *blossoming*: modello a singolo grado di libertà







La struttura HSC viene appiattita e avvolta per il lancio. Dopo il rilascio, l'energia elastica immagazzinata guida il dispiegamento.

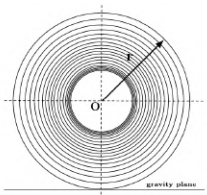
Il modello descrive soltanto la prima fase: la spira mantiene forma approssimativamente circolare e il suo raggio cresce da r_0 fino a

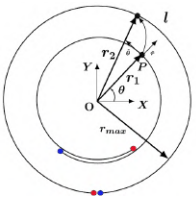
$$r_{max} = \frac{L}{2\pi}$$

L'obiettivo è stimare tempo e velocità di dispiegamento con un modello dinamico minimale.

Dinamica di dispiegamento di un *tape spring*

Cinematica ed energie del modello a raggio variabile





La lunghezza avvolta è costante:

$$L = r(t)\theta(t)$$

Derivando rispetto al tempo

$$\dot{r}\theta + r\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -\frac{\theta}{r}\dot{r} = -\frac{L}{r^2}\dot{r}$$

Il problema si riduce quindi alla sola coordinata $r(t)$.

Energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}\rho_m L\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2}\rho_m L\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)\dot{r}^2$$

Energia elastica del guscio laminato:

$$V_e = \frac{1}{2}bL\left(\frac{D_{11}}{r^2} - \frac{2D_{12}}{Rr} + \frac{D_{22}}{R^2}\right)$$

Interpretazione

Il dispiegamento converte l'energia di deformazione immagazzinata durante l'avvolgimento in energia cinetica della spira.

Dinamica di dispiegamento di un *tape spring*

Equazione del moto e soluzione numerica

Con la Lagrangiana $\mathcal{L} = T - V_e$, l'equazione di Eulero–Lagrange conduce a una ODE non lineare nella sola coordinata $r(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\rho_m \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)\ddot{r} - \rho_m \frac{L^2}{r^3}\dot{r}^2 - \frac{bD_{11}}{r^3} + \frac{bD_{12}}{Rr^2} = 0}$$

Le condizioni iniziali rappresentano la configurazione avvolta:

$$r(0) = r_0, \qquad \dot{r}(0) = 0$$

La fase di *blossoming* termina quando

$$\boxed{r(t_b) = \frac{L}{2\pi}}$$

Origine della non linearità

Termini inerziali dipendenti da $1/r^2$ e $1/r^3$ e termini elastici associati alla curvatura variabile.

Caso numerico (vd. script fornito)

Trascurando gli effetti dissipativi, la soluzione fornisce un tempo di blossoming dell'ordine di

$$\boxed{t_b \simeq 0.34 \text{ s}}$$

Dinamica di dispiegamento di un *tape spring*

Dissipazione: resistenza aerodinamica e attrito

Con forze non conservative:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = Q_r, \qquad \boxed{Q_r = Q_r^{air} + Q_r^{fr}}$$

Resistenza aerodinamica

Velocità normale $\simeq \dot{r}$ e area efficace

$$A(r) = 2\pi r b$$

Per una legge di *drag* quadratica:

$$\mathcal{D}_{air} = \frac{1}{3}\pi b r \rho_{air} C_D \dot{r}^3$$

$$\boxed{Q_r^{air} = -\frac{\partial \mathcal{D}_{air}}{\partial \dot{r}} = -\pi b r \rho_{air} C_D \dot{r}^2}$$

Attrito tra gli strati

La forza normale tra le spire è stimata come

$$F_N = \frac{h L^4 \rho_m}{2\pi r^5}\dot{r}^2$$

Con $F_{fr} = \mu F_N$:

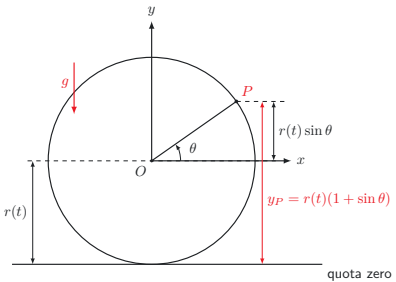
$$\mathcal{D}_{fr} = \frac{h L^4 \mu \rho_m}{6\pi r^5}\dot{r}^3$$

$$\boxed{Q_r^{fr} = -\frac{h L^4 \mu \rho_m}{2\pi r^5}\dot{r}^2}$$

Entrambi i termini si oppongono al dispiegamento; l'attrito presenta inoltre una forte dipendenza dalla configurazione, $\propto r^{-5}$.

Dinamica di dispiegamento di un *tape spring*

Contributo della gravità



La quota del punto P è

$$y_P(\theta) = r(t)(1 + \sin\theta)$$

La gravità è una forza **conservativa**: entra nel modello attraverso l'energia potenziale. Poiché

$$2\pi n_{rev} = \frac{L}{r},$$

l'integrazione della quota lungo la parte avvolta fornisce

$$\boxed{V_g = \rho_m g L r \left[\frac{L}{r} + 1 - \cos\left(\frac{L}{r}\right)\right]}$$

La Lagrangiana diventa quindi

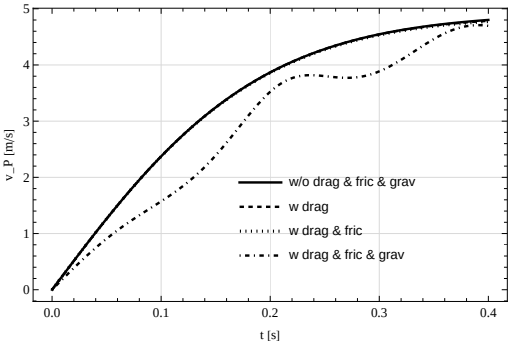
$$\boxed{\mathcal{L} = T - (V_e + V_g)}$$

Rispetto al modello ideale, la gravità modifica direttamente il bilancio energetico durante l'espansione della spira.

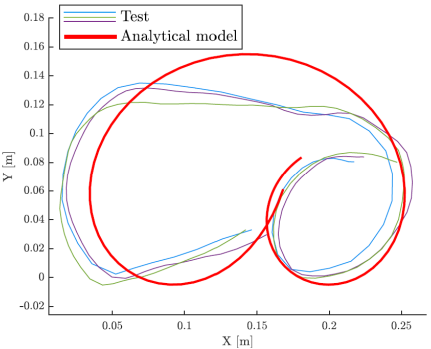
Nel caso numerico del testo l'inclusione della gravità porta l'incremento del tempo di blossoming a circa 11.6%, mentre drag e attrito hanno un effetto molto più contenuto.

Dinamica di dispiegamento di un *tape spring*

Confronto finale con l'esperimento



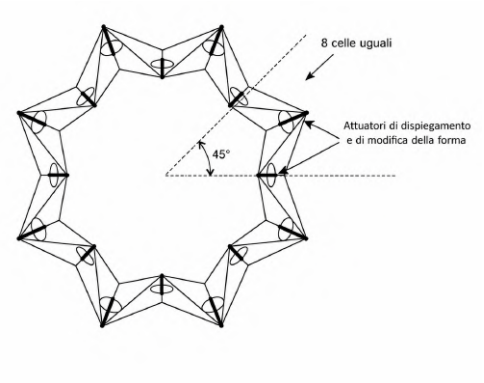
Effetto dei diversi livelli di modello sulla traiettoria calcolata durante il blossoming.



Confronto tra traiettoria analitica e traiettoria osservata sperimentalmente.

Il modello a 1 GDL riproduce il meccanismo dominante della prima fase, pur restando una descrizione fortemente semplificata del dispiegamento reale.

Accenno all'analisi multi-corpo



Un sistema multi-corpo è un insieme di corpi rigidi o deformabili collegati mediante cerniere, guide, vincoli e attuatori.

Coordinate generalizzate e vincoli:

$$\mathbf{q} = [q_1, \ldots, q_n]^T, \qquad \mathbf{\Phi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}.$$

Equazioni del moto vincolato:

$$\boxed{\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}$$

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}.$$

Il problema conduce naturalmente a un sistema differenziale-algebrico.

Accenno all'analisi multi-corpo

Residuo dinamico e linearizzazione

Le equazioni del moto vincolato possono essere raccolte nel **residuo dinamico**

$$\boxed{\mathbf{r}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{q}}^{T}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}$$

La soluzione deve soddisfare simultaneamente

$$\mathbf{r} = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$$

Attorno a una soluzione corrente $(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*, \ddot{\mathbf{q}}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, si introducono le correzioni $\Delta\mathbf{q}$, $\Delta\dot{\mathbf{q}}$, $\Delta\ddot{\mathbf{q}}$ e $\Delta\boldsymbol{\lambda}$.

Linearizzazione al primo ordine

$$\mathbf{M}^*\Delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_T^*\Delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_T^*\Delta\mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{q}}^{*T}\Delta\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{r}^*$$
$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{q}}^*\Delta\mathbf{q} = -\boldsymbol{\Phi}^*$$

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}, \qquad \mathbf{C}_T = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$$

Le correzioni di configurazione e le reazioni vincolari devono quindi essere determinate **simultaneamente**.

Accenno all'analisi multi-corpo

Integrazione temporale: Newton–Newmark

Sostituendo le relazioni di Newmark nella linearizzazione precedente, le correzioni di velocità e accelerazione si esprimono in termini di $\Delta\mathbf{q}$:

$$\Delta\dot{\mathbf{q}} = \frac{\gamma}{\beta h}\Delta\mathbf{q}, \qquad \Delta\ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\beta h^2}\Delta\mathbf{q}$$

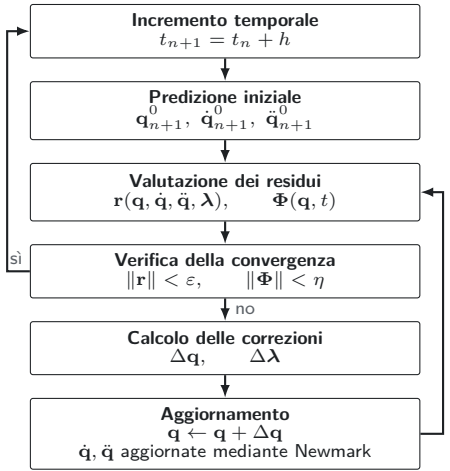
Si introduce quindi la **tangente efficace**

$$\mathbf{S}_T = \mathbf{K}_T + \frac{\gamma}{\beta h}\mathbf{C}_T + \frac{1}{\beta h^2}\mathbf{M}$$

Il sistema incrementale accoppiato diventa

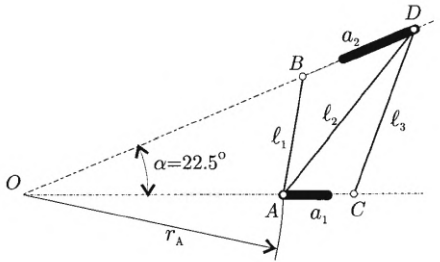
$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_T & \mathbf{\Phi}_\mathbf{q}^T \\ \mathbf{\Phi}_\mathbf{q} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{q} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{\Phi} \end{Bmatrix}$$

Newton–Newmark trasforma il problema dinamico non lineare in una successione di sistemi lineari incrementali.



Accenno all'analisi multi-corpo

Esempio cinematico: cella di una struttura anulare dispiegabile



Usiamo quattro **coordinate generalizzate non minime**:

$$\boxed{\mathbf{q} = \begin{bmatrix} r_A & r_B & r_C & r_D \end{bmatrix}^T}$$

Le tre lunghezze costanti introducono altrettanti **vincoli olonomi**:

$$\Phi_1(\mathbf{q}) = r_A^2 + r_B^2 - 2 r_A r_B \cos\alpha - \ell_1^2 = 0$$
$$\Phi_2(\mathbf{q}) = r_A^2 + r_D^2 - 2 r_A r_D \cos\alpha - \ell_2^2 = 0$$
$$\Phi_3(\mathbf{q}) = r_C^2 + r_D^2 - 2 r_C r_D \cos\alpha - \ell_3^2 = 0$$

In forma compatta,

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \qquad \boxed{n_{\text{mob}} = 4 - 3 = 1}$$

r_A può essere usato come coordinata di dispiegamento della cella.

Accenno all'analisi multi-corpo

Linearizzazione del problema cinematico della cella

Per $\mathbf{q} = [r_A, r_B, r_C, r_D]^T$, la Jacobiana dei tre vincoli geometrici è

$$\mathbf{\Phi_q} = 2\begin{bmatrix} r_A - r_B c & r_B - r_A c & 0 & 0 \\ r_A - r_D c & 0 & 0 & r_D - r_A c \\ 0 & 0 & r_C - r_D c & r_D - r_C c \end{bmatrix}, \qquad c = \cos\alpha$$

Legge di attuazione. Poiché $n_{\text{mob}} = 1$, si prescrive una sola legge indipendente, per esempio

$$a_1(\mathbf{q}) = r_C - r_A = \bar{a}_1(t)$$

che equivale al vincolo

$$\Phi_a(\mathbf{q}, t) = r_C - r_A - \bar{a}_1(t) = 0$$

La Jacobiana del problema cinematico completo si ottiene aggiungendo la riga associata all'attuatore:

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi_q} \\ -1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \end{bmatrix}$$

Iterazione di Newton. Le quattro equazioni sono raccolte in

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{q}, t) = \begin{Bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_a \end{Bmatrix}^T = \mathbf{0}$$

A partire da $\mathbf{q}^{(k)}$:

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{q}}^{(k)} \Delta\mathbf{q}^{(k)} = -\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{(k)}$$

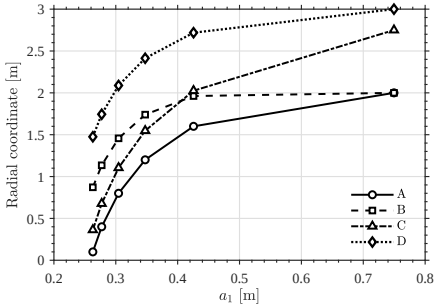
$$\mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{q}^{(k)} + \Delta\mathbf{q}^{(k)}$$

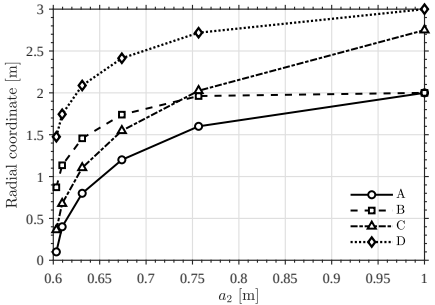
finché

$$\left\| \widetilde{\mathbf{\Phi}}^{(k)} \right\| < \eta$$

Accenno all'analisi multi-corpo

Corsa degli attuatori

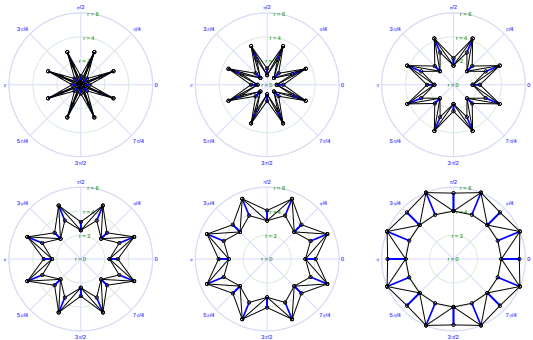




La relazione tra attuazione e configurazione è non lineare: la sensibilità delle posizioni radiali alle variazioni degli attuatori dipende dalla configurazione corrente ed è più marcata nelle configurazioni retratte.

Accenno all'analisi multi-corpo

Dal modello di cella alla sequenza di dispiegamento



Ripetendo la cella lungo l'anello si ricostruisce la cinematica del meccanismo completo. La simulazione consente di verificare **percorso di apertura, corse degli attuatori, interferenze geometriche e configurazioni sensibili o critiche**.

Caso di corpi flessibili

Dal multibody rigido alle sottostrutture deformabili

Nei sistemi spaziali leggeri o di grande apertura, alle grandi variazioni della configurazione si sovrappongono le **deformazioni elastiche** dei singoli componenti.

Riduzione della sottostruttura

Per il corpo flessibile i, la riduzione Craig–Bampton introduce

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m^{(i)} \\ \boldsymbol{\eta}_p^{(i)} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{x}_m^{(i)}$: GDL fisici d'interfaccia;
- $\boldsymbol{\eta}_p^{(i)}$: coordinate modali interne.

Il componente FEM viene così sostituito da un **superelemento** caratterizzato da $\mathbf{M}_{CB}^{(i)}$ e $\mathbf{K}_{CB}^{(i)}$.

Coordinate del sistema multi-corpo

Il vettore globale contiene sia il moto dei corpi sia le coordinate elastiche ridotte:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r^T & \mathbf{X}_1^T & \cdots & \mathbf{X}_{n_s}^T \end{bmatrix}^T$$

Le grandi rotazioni e traslazioni sono descritte dal modello multi-corpo; la deformazione del singolo componente può rimanere **lineare nel suo riferimento materiale**.

modello FEM → Craig–Bampton → superelemento → multibody flessibile

Caso di corpi flessibili

Equazioni del moto e contributo elastico

Le equazioni del moto assumono la forma

$$\boxed{\mathbf{M}_{MB}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_{MB}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}_{el}(\mathbf{q}) + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{g}_{ext}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t), \qquad \mathbf{\Phi}(\mathbf{q},t) = \mathbf{0}}$$

Contributi dinamici

- $\mathbf{M}_{MB}$: inerzia del moto complessivo e della deformazione elastica;
- $\mathbf{h}_{MB}$: termini centrifughi, giroscopici e convettivi;
- $\mathbf{f}_{el}$: forze generalizzate dovute alla deformabilità.

Vincoli cinematici

$\mathbf{\Phi}(\mathbf{q},t) = \mathbf{0}$ continua a descrivere cerniere, guide, giunti e leggi di attuazione.
Nel caso flessibile, $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{q}}$ dipende anche dalle coordinate elastiche ridotte.

Forze elastiche ridotte

Per comportamento elastico lineare del singolo componente,

$$U_{el} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_s} \mathbf{X}_i^T \mathbf{K}_{CB}^{(i)} \mathbf{X}_i$$

Le corrispondenti forze generalizzate sono

$$\boxed{\mathbf{f}_{el} = \frac{\partial U_{el}}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{n_s} \left(\frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \mathbf{K}_{CB}^{(i)} \mathbf{X}_i}$$

La procedura Newton–Newmark introdotta per il caso rigido resta formalmente invariata.